С.Н. Зиненко

Математический анализ

Интегрирование функций одной переменной

(теория к задачам)

2018

Интегрирование функций

Теория

Первообразной *функции* $f(x)$ *на интервале* $\left(a,\, b\right)$ *называется функция* $F(x)$ *такая, что*

$$F'(x)=f(x) \qquad \text{или} \qquad dF(x)=f(x)dx \qquad \forall x\in\left(a,\, b\right)$$

Неопределенным интегралом *называется совокупность всех первообразных*

$$\int f(x)dx = F(x) + const$$

Нахождение интеграла сводится к восстановлению первообразной $F(x)$ *по ее производной* $f(x)$ *или, что, то же самое, по ее дифференциалу* $f(x)dx$, *так что интегрирование является операцией обратной дифференцированию*

$$d\left(F(x)+c\right)=\cancel{d\int} f(x)dx = f(x)dx \qquad \Leftrightarrow \qquad \int f(x)dx=\cancel{\int d}\left(F(x)+c\right)=F(x)+c$$

Правила интегрирования вытекают из соответствующих правил дифференцирования

Теорема *(правила интегрирования)*

Пусть

1) $u=f(x)\,,\quad v=g(x)$

$\Rightarrow$

1) Линейность

$$\int\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx \qquad \int(\alpha u+\beta v)dx=\alpha\int u\,dx+\beta\int v\,dx$$

2) Интегрирование по частям

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx=f(x)\cdot g(x)-\int g(x)\cdot f'(x)dx \qquad \int u\,dv=u\,v-\int v\,du$$

3) Интегрирование подстановкой

$$\int f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)dx=\int f\left(g(x)\right)dg(x)=\left[\ g(x)=y\ \right]=\int f(y)dy \qquad \int u(v)\,v'\,dx=\int u(v)\,dv$$

Таблица дифференциалов		***Таблица неопределенных интегралов***
$d\ e^x = e^x dx$		$\int e^x dx = e^x + c$
$d\ln\|x\| = \frac{1}{x}\,dx$		$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + c$
$d\ x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha-1}\,dx$		$\int x^{\beta}\,dx = \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + c$
$d\sin x = \cos x\,dx$		$\int \cos x\,dx = \sin x + c$
$d\cos x = -\sin x\,dx$		$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
$d\ \mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$	$\Leftrightarrow$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \mathrm{tg}\,x + c$
$d\ \mathrm{ctg}\,x = -\frac{1}{\sin^2 x}\,dx$		$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\mathrm{ctg}\,x + c$
$d\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$		$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$
$d\,\mathrm{arc\,tg}\,x = \frac{1}{1+x^2}\,dx$		$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{arc\,tg}\,x + c$
$d\ln\left\|x+\sqrt{x^2\pm 1}\right\| = \frac{1}{\sqrt{x^2\pm 1}}\,dx$		$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm 1}}\,dx = \ln\left\|x+\sqrt{x^2\pm 1}\right\| + c$

Таблица неопределенных интегралов по существу является таблицей дифференциалов прочтенной наоборот “справа-налево”

16. Интегрирование “подстановкой” и “по частям”

Отметим некоторые полезные при интегрировании советы

- *постоянный множитель, не задумываясь, выносим за знак интеграла*

$$\int c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int f(x)\,dx$$

- *интеграл от суммы функций (как правило) разбиваем в сумму интегралов*

$$\int \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

- *любой корень преобразуем в степень с дробным показателем*

$$\int \dots \sqrt[n]{f(x)}\ \dots\ dx = \int \dots \big(f(x)\big)^{\frac{1}{n}} \dots\ dx$$

- *если на дифференцирование удобно смотреть как на своеобразную операцию “вынесения” функции из-под знака дифференциала d с превращением в свою производную, то на операцию интегрирования, наоборот, “внесения” функции назад под знак дифференциала d с восстановлением в первообразную. Отметим, что “выносить” или “вносить” мы умеем только функции из нашей таблицы*

$$dF(x) = \overset{f(x)}{d\dots x} = f(x)\,dx \quad\Leftrightarrow\quad \int f(x)\,dx = \int \dots \overset{F(x)}{d\ \ x} = F(x)+c$$

- *оба основных метода интегрирования (“подстановкой” и “по частям”) имеют одинаковое начало: необходимо “единую” подынтегральную функцию разбить в произведение двух сомножителей $f\cdot g'$, в одном из них узнать (вспомнить строку из таблицы неопределенных интегралов!) производную g' некоторой функции-первообразной g, внести g' под знак дифференциала d, превратив в g*

$$\int f(\dots)\cdot g'(x)\,\overset{g(x)}{d\,x} = \int f(\dots)\,d\,g(x)$$

- *если оставшаяся перед знаком дифференциала d функция $f(\dots)$ представляет собой сложную функцию от $g(x)$: $f(g(x))$, то делаем замену переменных (интегрирование “подстановкой”)*

$$\boxed{\int f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx = \int f\big(g(x)\big)\,d\,g(x) = \Big[\ g(x)=y\ \Big] = \int f(y)\,dy}$$

- *если функции $f(x)$ и $g(x)$ никак не связаны между собой, то интегрируем “по частям”, надеясь, что новое выражение $g(x)\cdot f'(x)$ интегрировать легче (например, это функция из нашей таблицы)*

$$\boxed{\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = \int f(x)\,d\,g(x) = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\,d\,f(x) = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\cdot f'(x)\,dx}$$

17. Интегрирование рациональных дробей (“вещественный случай”)

Правильная рациональная дробь

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^{n} + a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots \ + a_0}{b_m x^{m} + b_{m-1}x^{m-1} + \ \dots \ + b_0}, \quad (n < m)$$

может быть разложена в сумму простейших вещественных рациональных дробей по корням знаменателя. Если x_0 *вещественный корень знаменателя кратности k, то знаменатель* $Q_m(x)$ *разлагается на множители вида*

$$Q_m(x) = (x - x_0)^k \left(\dots \right)$$

что в свою очередь порождает цепочку из k простейших вещественных рациональных дробей

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x - x_0)^k \left(\dots \right)} = \left(\frac{A_k}{(x - x_0)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x - x_0)^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{(x - x_0)^1} \right) + \dots$$

Замечание. *Коэффициенты* A_k, A_{k-1}, ..., A_1 *всегда можно найти универсальным “методом неопределенных коэффициентов”. Для этого приводим сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами к общему знаменателю* $Q_m(x)$ *и приравниваем числители, т.е. коэффициенты при одинаковых степенях* x^n, x^{n-1}, ..., x^0 *Решив полученную систему линейных уравнений, находим коэффициенты.*

В частных случаях (например, когда корень x_0 *простой* $k=1$*) удобно пользоваться частными приемами.*

18. Интегрирование рациональных дробей (“комплексный случай”)

Правильная рациональная дробь

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^{n} + a_{n-1}x^{n-1} + \ \ldots \ + a_0}{b_m x^{m} + b_{m-1}x^{m-1} + \ \ldots \ + b_0}, \quad (n < m)$$

может быть разложена в сумму простейших вещественных рациональных дробей по корням знаменателя.

Если $z_0, \bar{z}_0$ *пара комплексно сопряженных корней знаменателя кратности* l, *то полином* $Q_m(x)$ *разлагается на вещественные множители вида*

$$Q_m(x) = \left(x^2 - 2px + q\right)^l (\ \ldots\ )$$

где

$$x^2 - 2px + q = \left(x - z_0\right)\left(x - \bar{z}_0\right) = x^2 - \left(z_0 + \bar{z}_0\right) x + z_0 \bar{z}_0 = x^2 - 2\operatorname{Re} z_0\, x + \left|z_0\right|^2$$

что в свою очередь порождает цепочку из l *простейших вещественных рациональных дробей*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{\left(x^2 - 2px + q\right)^l (\ldots)} = \left(\frac{M_l x + N_l}{\left(x^2 - 2px + q\right)^l} + \frac{M_{l-1} x + N_{l-1}}{\left(x^2 - 2px + q\right)^{l-1}} + \ldots + \frac{M_1 x + N_1}{\left(x^2 - 2px + q\right)^1}\right) + \ldots$$

Замечание. *Коэффициенты* $M_l, N_l;\ M_{l-1}, N_{l-1};\ \ldots\ ;\ M_1, N_1$ *всегда можно найти универсальным “методом неопределенных коэффициентов”. Для этого приводим сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами к общему знаменателю* $Q_m(x)$ *и приравниваем числители, т.е. коэффициенты при одинаковых степенях* $x^n,\ x^{n-1}, \ldots,\ x^0$ *Решив полученную систему линейных уравнений, находим коэффициенты.*

В частных случаях (например, когда корни $z_0, \bar{z}_0$ *простые* $l = 1$*) удобно пользоваться частными приемами.*

19. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Интегралы вида

$$\int \frac{Mx + N}{\sqrt{\pm\left(x^2 - 2px + q\right)}}\, dx$$

можно находить аналогично интегралам от простейшей рациональной дроби с простой парой комплексно сопряженных корней в знаменателе.

Интегралы вида

$$\int R\left(x,\ \sqrt[k]{\frac{ax + b}{cx + d}} \right)\, dx$$

заменой переменных

$$\left[\sqrt[k]{\frac{ax + b}{cx + d}} = y \ \Rightarrow\ x = \frac{b - dy^k}{cy^k - a} \ \Rightarrow\ dx = \frac{(ad - bc)ky^{k-1}}{\left(cy^k - a\right)^2} dy \right]$$

сводятся к интегрированию некоторой рациональной дроби

$$\int R\left(\frac{b - dy^k}{cy^k - a},\ y \right) \frac{(ad - bc)\, k\, y^{k-1}}{\left(cy^k - a\right)^2}\, dy$$

Дифференциальный бином $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ *интегрируется в следующих трех случаях:*

1) $\boldsymbol{p}$ ***– целое****,* $m=\dfrac{m_1}{k},\ n=\dfrac{n_1}{k}$ *– рациональные* $\Rightarrow$

это просто частный случай рассмотренных выше интегралов

$$\int \sqrt[k]{x}^{\,m_1}\left(a+b\sqrt[k]{x}^{\,n_1}\right)^p dx=\left[\ \sqrt[k]{x}=y\ \Rightarrow\ x=y^k\ \Rightarrow\ dx=ky^{k-1}dy\ \right]=\int y^{m_1}\left(a+by^{n_1}\right)^p ky^{k-1}dy$$

2) $p=\dfrac{p_1}{k}$ *– нецелое,* $\boldsymbol{q}=\dfrac{\boldsymbol{m+1}}{\boldsymbol{n}}$ ***– целое*** $\Rightarrow$ *заменой переменных*

$$\left[\ \left(a+bx^n\right)^{\frac{1}{k}}=y\ \Rightarrow\ x^n=\frac{y^k-a}{b}\ \Rightarrow\ nx^{n-1}dx=\frac{k}{b}y^{k-1}dy\ \right]$$

сводится к интегрированию некоторой рациональной дроби

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^{\frac{p_1}{k}}dx=\int x^m\,\frac{1}{n}x^{-(n-1)}\left(a+bx^n\right)^{\frac{p_1}{k}}nx^{n-1}dx=$$

$$=\frac{1}{n}\int\left(x^n\right)^{\frac{m+1}{n}-1}\left(a+bx^n\right)^{\frac{p_1}{k}}nx^{n-1}dx=\frac{k}{nb}\int\left(\frac{y^k-a}{b}\right)^{q-1}y^{p_1+k-1}dy$$

3) воспользуемся неоднозначностью представления подынтегрального выражения

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=\int x^m x^{np}\left(ax^{-n}+b\right)^p dx=\int x^{m+np}\left(b+ax^{-n}\right)^p dx=\int x^{\tilde m}\left(\tilde a+\tilde b x^{\tilde n}\right)^{\tilde p}dx$$

и для новых параметров $\tilde m=m+np,\ \tilde n=-n,\ \tilde p=p$ *проверим выполнение случая 2)*

$$\tilde p=p=\frac{p_1}{k}\text{ – нецелое, }\ \tilde{\boldsymbol{q}}=-\frac{\tilde m+1}{\tilde n}=-\frac{m+np+1}{-n}=\frac{\boldsymbol{m+1}}{\boldsymbol{n}}+\boldsymbol{p}\ \text{ – }\ \textbf{целое}$$

20. Интегрирование некоторых тригонометрических функций

Интегралы вида

$$\int \cos^n x\,dx, \quad \int \sin^n x\,dx \quad (n>0)$$

интегрируются по-разному в зависимости от четности-нечетности n

1) $n = 2k+1$ *– нечетное* $\Rightarrow$

$$\int \cos^{2k+1} x\,dx = \int \cos^{2k} x \cdot \cos x\,dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)^k d\sin x = \left[\ \sin x = y\ \right] = \int \left(1-y^2\right)^k dy$$

2) $n = 2k$ *– четное* $\Rightarrow$

$$\int \cos^{2k} x\,dx = \int \left(\cos^2 x\right)^k dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^k dx \quad \Rightarrow$$

возводим в степень k *и для каждого слагаемого в зависимости от его степени применяем 1) или 2)*

При нахождении интегралов вида

$$\int f(\sin x,\ \cos x)\,dx$$

прежде всего попытаемся отщепить множитель $\cos x$ *(или* $\sin x$*) с таким расчетом, чтобы оставшаяся функция выражалась через "родственную"* $\sin x$ *(или* $\cos x$*)*

$$\int f(\sin x,\ \cos x)\,dx = \int g(\sin x)\cdot \cos x\,dx \overset{\sin x = y}{=} \int g(y)\,dy$$

или

$$\int f(\sin x,\ \cos x)\,dx = \int g(\cos x)\cdot \sin x\,dx \overset{\cos x = y}{=} -\int g(y)\,dy$$

Если не удалось отщепить множитель, отдельным случаем выступает однородная ситуация (при проведении преобразований полезно помнить, что $1 \equiv \cos^2 x + \sin^2 x$*)*

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx = \int g\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) dx = \int g(\operatorname{tg} x)\,dx = \longrightarrow$$

Сделав замену переменной

$$\left[\begin{array}{c} \operatorname{tg} x = y \\ x = \operatorname{arctg} y \ \Rightarrow\ dx = \dfrac{1}{1+y^2}\,dy \end{array}\right]$$

получим

$$\rightarrow = \int g(y)\,\frac{1}{1+y^2}\,dy$$

В общем случае вспомним тригонометрические формулы

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

и воспользуемся универсальной заменой переменной

$$\left[\begin{array}{c} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = y \\ x = 2\operatorname{arctg} y \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2}{1+y^2}dy \end{array}\right]$$

так что

$$\int f(\sin x,\ \cos x)dx = \int f\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right)dx = \int f\left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}\right)\frac{2}{1+y^2}dy$$

Замечание. *Как обычно, универсальная замена переменной "выручает" всегда, но получаемое при этом подынтегральное выражение значительно более громоздко, по сравнению с частными случаями, которые полезно распознать и применить.*

Определенный интеграл

Пусть на конечном отрезке $\left[\, a,\, b \,\right]$ *задана функция* $f(x)$.

Разобьем отрезок $\left[\, a,\, b \,\right]$ *точками деления*

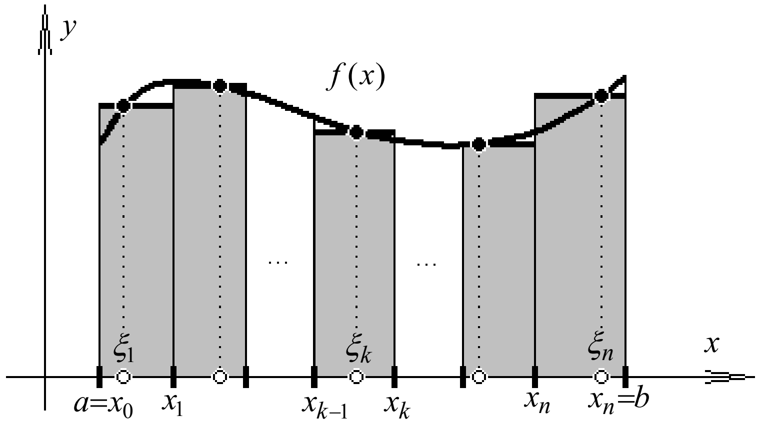
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

на малые части $\left[\, x_{k-1},\, x_k \,\right]$ *длиной* $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

и обозначим через $d = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$ *диаметр разбиения.*

Выберем на каждой малой части промежуточную точку $\xi_k \in \left[\, x_{k-1},\, x_k \,\right]$.

Составим интегральную сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$.



Определенным интегралом (интегралом Римана) от функции $f(x)$ *по отрезку* $\left[\, a,\, b \,\right]$ *называется предел интегральных сумм, когда диаметр разбиения стремится к нулю*

$$\boxed{\lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx}$$

если он существует, конечен и не зависит ни от способа разбиения, ни от выбора промежуточных точек.

Геометрический смысл: площадь под кривой $y = f(x),\quad x \in \left[\, a,\, b \,\right]$.

Физический смысл: путь, пройденный со скоростью $v = f(t)$ *за период времени* $t \in \left[\, a,\, b \,\right]$

масса (заряд) стержня $\left[\, a,\, b \,\right]$ *с линейной плотностью* $\rho = f(x)$

Первообразной *(обобщенной) функции* $f(x)$ *на отрезке* $\left[\, a,\, b \,\right]$ *называется* ***непрерывная*** *на* $\left[\, a,\, b \,\right]$ *функция* $F(x)$ *такая, что* $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \left[\, a,\, b \,\right]$, *кроме, быть может,* ***конечного*** *набора точек* $a \le c_0 < \ldots < c_j < \ldots < c_m \le b$, *в которых* $F'(c_j) \ne f(c_j)$ *или* $\nexists$

Теорема *(формула Ньютона-Лейбница)*

Пусть

1) $\exists$ *интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$

2) $\exists$ *первообразная* $F(x)$

$\Rightarrow$

1) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Отметим правила интегрирования определенных интегралов, вытекающие из формулы Ньютона-Лейбница и соответствующих правил для неопределенных интегралов

Линейность

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

Интегрирование по частям

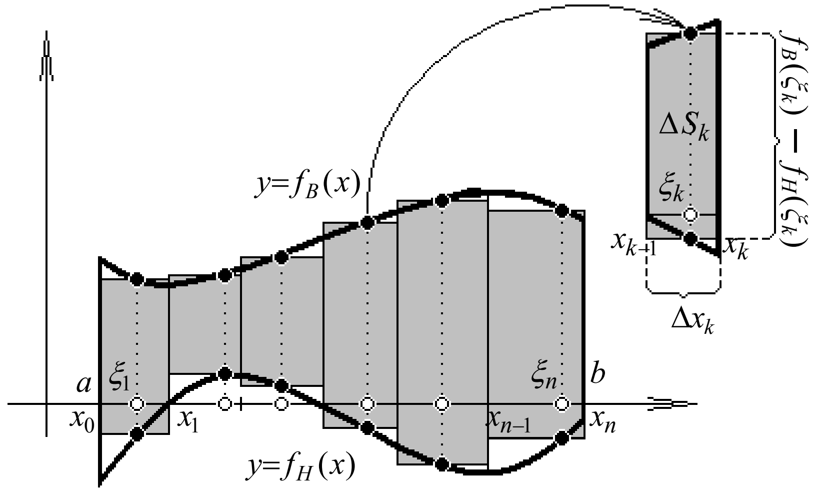
$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,d\,g(x) = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,d f(x) = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\cdot f'(x)\,dx$$

Замена переменной

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx = \int_a^b f\big(g(x)\big)\,d\,g(x) = \left[\begin{array}{c} g(x) = y \\ a \xrightarrow{x} b \quad \Rightarrow \quad g(a) \xrightarrow{y} g(b) \end{array}\right] = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

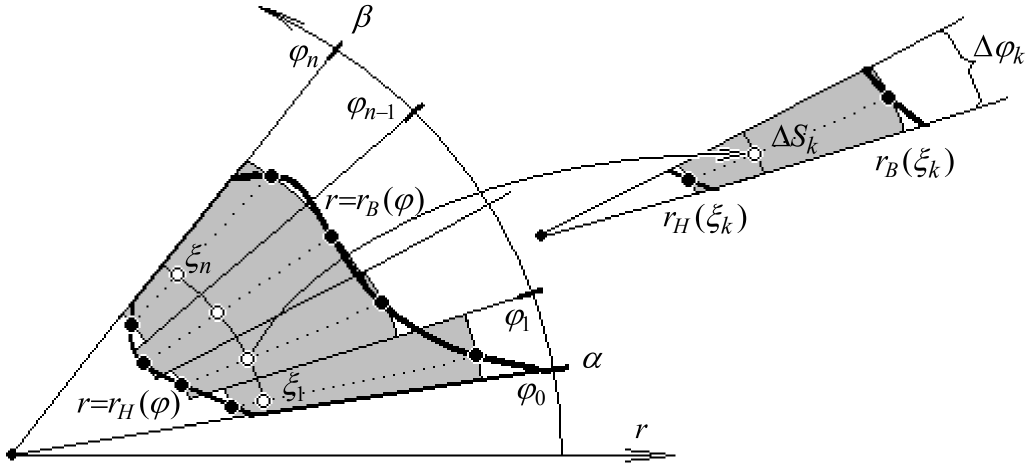
21. Площадь фигуры

Площадь "криволинейного прямоугольника"



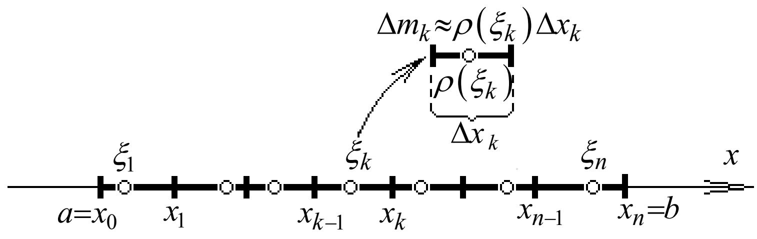
$$S = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k \approx \sum_{k=1}^{n} \Big(f_B(\xi_k) - f_H(\xi_k) \Big) \Delta x_k \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = \int_a^b \Big(f_B(x) - f_H(x) \Big) dx}$$

Площадь "криволинейного сектора"



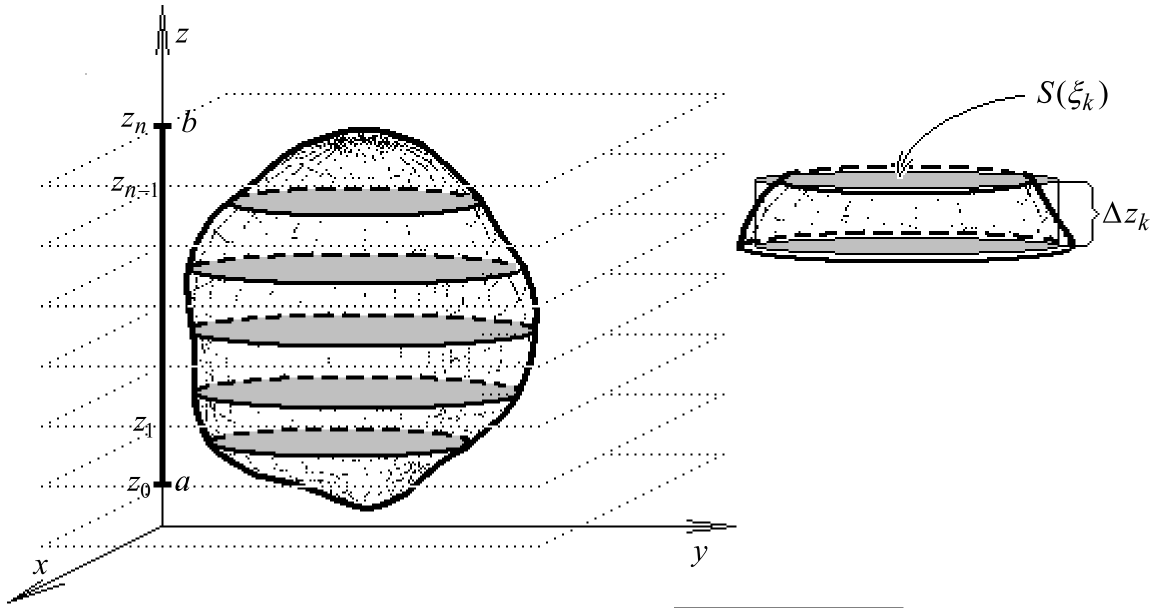
$$S = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \Big(r_B{}^2(\xi_k) - r_H{}^2(\xi_k) \Big) \Delta \varphi_k \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \Big(r_B{}^2(\varphi) - r_H{}^2(\varphi) \Big) d\varphi}$$

а) $q = \int_a^b \rho(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos x\,dx = 0$



22. Объем тела

Пусть тело заключено между горизонтальными плоскостями $z=a$ *и* $z=b$. *Если известна площадь сечения* $S(z)$ $(a \le z \le b)$ *тела горизонтальной плоскостью* $z = const$, *то объем может быть найден по формуле*



$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta z_k \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \int_a^b S(z)\,dz}$$

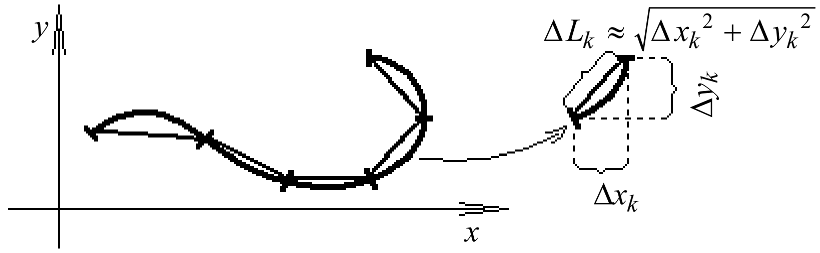
По теореме Гульдина объем тела, образованного вращением фигуры вокруг не пересекающей ее оси, равен произведению длины окружности $2\pi R$, *описываемой ее центром масс, на площадь фигуры* S

$$\boxed{V = 2\pi R \cdot S}$$

23. Длина и масса кривой

Пусть кривая задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$



Определив длину кривой как предельное значение длин ломаных, вписанных в кривую, получим

$$L = \sum_{k=1}^{n} \Delta L_k \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Delta x_k^{\,2} + \Delta y_k^{\,2}} \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x'^2(\xi_k) + y'^2(\xi_k)}\, \Delta t_k \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt}$$

Пусть кривая задана явно

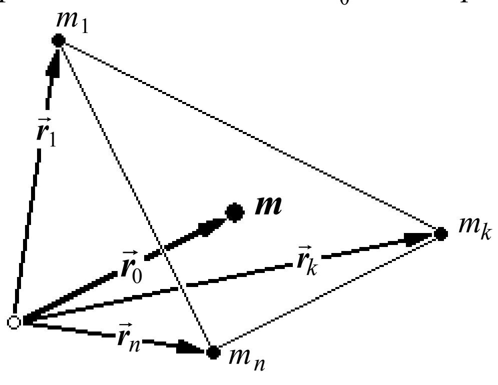
$$y = f(x), \quad x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}, \quad x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx}$$

Пусть кривая задана в полярных координатах

$$r = r(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [\alpha, \beta] \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\big(r(\varphi)\cos\varphi\big)'^2 + \big(r(\varphi)\sin\varphi\big)'^2}\, d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi}$$

Центр масс системы материальных точек $\vec{\boldsymbol r}_1, \dots, \vec{\boldsymbol r}_k, \dots, \vec{\boldsymbol r}_n$ *с массами* $m_1, \dots, m_k, \dots, m_n$ *определяется как точка* $\vec{\boldsymbol r}_0$, *в которой сосредоточена вся масса* $\boldsymbol m = \sum_{k=1}^{n} m_k$, *по формуле*

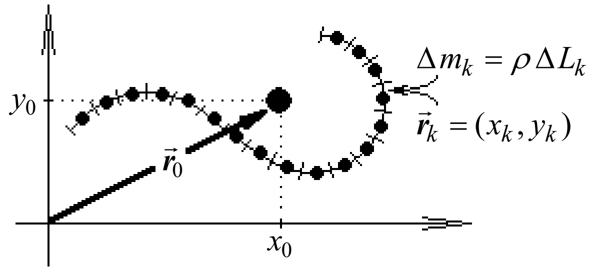


$$\vec{\boldsymbol r}_0 = \frac{1}{\boldsymbol m} \sum_{k=1}^{n} \vec{\boldsymbol r}_k\, m_k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{\boldsymbol m} \sum_{k=1}^{n} x_k\, m_k \\ y_0 = \dfrac{1}{\boldsymbol m} \sum_{k=1}^{n} y_k\, m_k \end{cases}$$

Пусть дана однородная кривая (линейная плотность $\rho = const$ *постоянна)*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

Разобьем кривую на достаточно малые дуги длиной ΔL_k *с массой* $\Delta m_k = \rho\, \Delta L_k$, *настолько малые, что каждую можно рассматривать как материальную точку.*



Тогда

$$\begin{cases} x_0 \approx \dfrac{1}{\boldsymbol{m}}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\,\Delta m_k = \dfrac{1}{\rho L}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\,\rho\,\Delta L_k \approx \dfrac{1}{L}\sum\limits_{k=1}^{n} x(\xi_k)\sqrt{x'^2(\xi_k)+y'^2(\xi_k)}\,\Delta t_k \\ y_0 \approx \dfrac{1}{\boldsymbol{m}}\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\,\Delta m_k = \dfrac{1}{\rho L}\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\,\rho\,\Delta L_k \approx \dfrac{1}{L}\sum\limits_{k=1}^{n} y(\xi_k)\sqrt{x'^2(\xi_k)+y'^2(\xi_k)}\,\Delta t_k \end{cases}$$

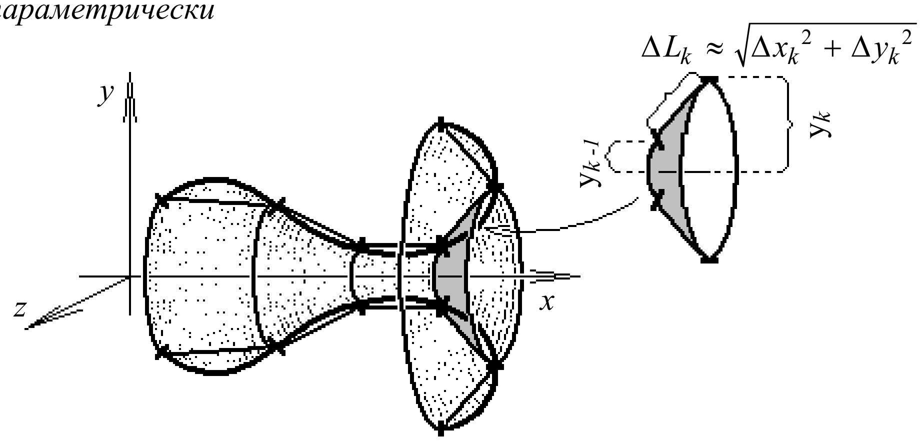
Отсюда вытекают "точные" формулы

$$\boxed{\begin{matrix} x_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt \\ y_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt \end{matrix}\quad , \qquad L = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt}$$

24. Площадь поверхности вращения

Пусть кривая задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [\,\alpha,\ \beta\,]$$



и лежит по одну сторону от оси Ox*:* $y(t) \ge 0$ *(или* Oy*:* $x(t) \ge 0$*)*

Определим площадь поверхности вращения вокруг оси Ox *(*Oy*) как предельное значение площадей, образованных вращением вокруг оси ломаных, вписанных в кривую. Учитывая, что каждое звено ломаной описывает боковую поверхность усеченного конуса, получим*

$$S = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k \approx \sum_{k=1}^{n} \pi\left(y_{k-1} + y_k\right)\Delta L_k \approx 2\pi \sum_{k=1}^{n} y(\xi_k)\sqrt{x'^2(\xi_k) + y'^2(\xi_k)}\,\Delta t_k$$

так что

$$Ox: \quad S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

$$Oy: \quad S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

Пусть кривая задана явно

$$y = f(x), \quad x \in [\,a,\ b\,] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}, \quad x \in [\,a,\ b\,] \quad \Rightarrow$$

$$Ox: \quad S = 2\pi \int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$$

$$Oy: \quad S = 2\pi \int_{a}^{b} x\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$$

Пусть кривая задана в полярных координатах

$$r = r(\varphi), \quad \varphi \in [\,\alpha,\ \beta\,] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [\,\alpha,\ \beta\,] \quad \Rightarrow$$

$$Ox: \quad S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi$$

$$Oy: \quad S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\cos\varphi\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi$$

По теореме Гульдина площадь поверхности, образованной вращением кривой вокруг не пересекающей ее оси, равна произведению длины окружности $2\pi R$, *описываемой ее центром масс, на длину кривой* L

$$\boxed{S = 2\pi R \cdot L}$$

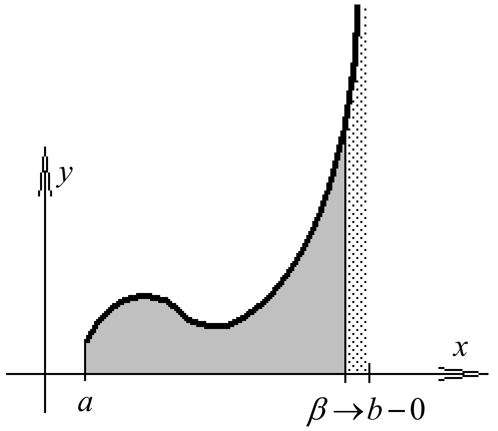
25. Несобственные интегралы

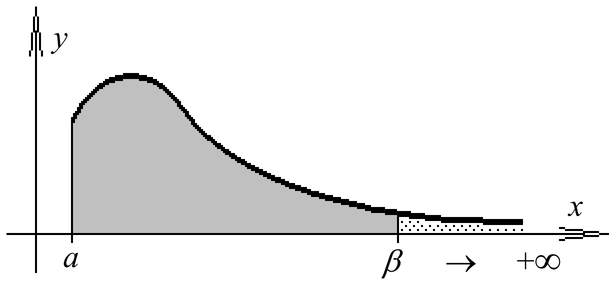
Несобственным интегралом от ***неограниченной функции*** *называется*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)dx$$

Несобственным интегралом по ***неограниченному промежутку*** *называется*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_a^\beta f(x)dx$$





Обозначив через $\omega = b - 0, \ +\infty$*, удобно объединить оба случая*

$$\int_a^\omega f(x)dx = \lim_{\beta \to \omega} \int_a^\beta f(x)dx$$

Если предел ***существует*** *и* ***конечен****, несобственный интеграл называется* ***сходящимся***
Из формулы Ньютона-Лейбница

$$\int_a^\omega f(x)dx = \lim_{\beta \to \omega} \int_a^\beta f(x)dx = \lim_{\beta \to \omega} F(x)\Big|_a^\beta = \lim_{\beta \to \omega}\big(F(\beta) - F(a)\big) = F(\omega) - F(a) = F(x)\Big|_a^\omega$$

вытекает, что ***сходимость*** *несобственного интеграла равносильна сходимости первообразной, т.е.* ***существованию конечного*** *предела*

$$\lim_{x \to \omega} F(x) = F(\omega)$$

В случае ***неотрицательной*** *подынтегральной функции* $\boldsymbol{f(x) \geq 0}$ *отметим следующие простые признаки сходимости несобственных интегралов, позволяющие выяснить сходимость опосредованно (т.е. без нахождения первообразной).*

Теорема *(признак сравнения в общей форме)*

Пусть
1) $(\ 0 \leq\ )\ f(x) \leq g(x)$

$\Rightarrow$

1) если “бóльший” $\int_a^\omega g(x)dx < \infty$ $\Rightarrow$ *“мéньший”* $\int_a^\omega f(x)dx < \infty$ **сх**

если “мéньший” $\int_a^\omega f(x)dx = \infty$ $\Rightarrow$ *“бóльший”* $\int_a^\omega g(x)dx = \infty$ ***расх***

Теорема *(признак сравнения в предельной форме)*

Пусть
1) $(\ 0 \leq\ )\ f(x) \underset{x \to \omega}{\sim} g(x)$

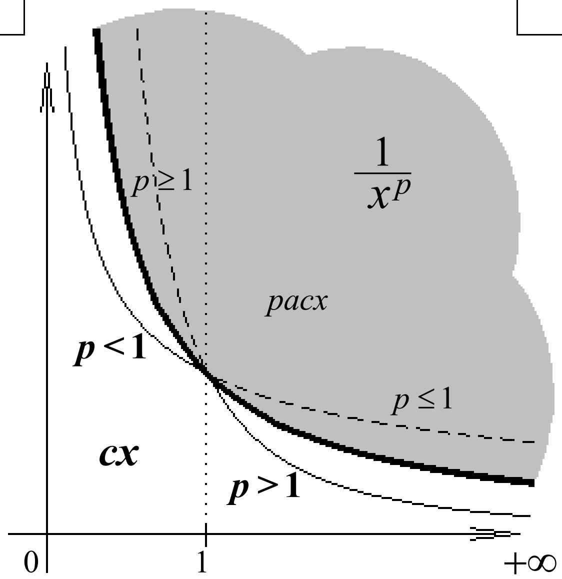
$\Rightarrow$

1) интегралы $\int_a^\omega f(x)dx$, $\int_a^\omega g(x)dx$ ***одновременно сх****одятся или* ***расх****одятся*

В качестве "эталонных" функций, с которыми чаще всего приходится сравнивать другие функции, отметим степенные $g(x) = \frac{1}{x^p}$ $\left(p > 0 \right)$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{p < 1}, \quad \textbf{сх} \\ p \ge 1, \quad \text{расх} \end{array} \right.$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \left[\begin{array}{l} p \le 1, \quad \text{расх} \\ \boldsymbol{p > 1}, \quad \textbf{сх} \end{array} \right.$$



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx = \left[\begin{array}{l} \left[\, p < 1 \,\right] = \int_1^{+\infty} x^{-p}\,dx = \left.\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{+\infty} = \dfrac{1}{1-p}\left(\underbrace{(+\infty)^{1-p}}_{+\infty} - 1 \right) = +\infty \\ \left[\, p = 1 \,\right] = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \left. \ln x \right|_1^{+\infty} = \underbrace{\ln(+\infty)}_{+\infty} - \ln 1 = +\infty \\ \left[\, p > 1 \,\right] = \int_1^{+\infty} x^{-p}\,dx = \left.\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{+\infty} = \dfrac{1}{p-1}\left(1 - \underbrace{\dfrac{1}{(+\infty)^{p-1}}}_{+0} \right) < +\infty \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p \le 1, \quad \text{расх} \\ \boldsymbol{p > 1}, \quad \textbf{сх} \end{array} \right.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \left[\begin{array}{l} \left[\, p < 1 \,\right] = \int_0^1 x^{-p}\,dx = \left.\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_0^1 = \dfrac{1}{1-p}\left(1 - \underbrace{(+0)^{1-p}}_{+0} \right) < +\infty \\ \left[\, p = 1 \,\right] = \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \left. \ln x \right|_0^1 = \ln 1 - \underbrace{\ln(+0)}_{-\infty} = +\infty \\ \left[\, p > 1 \,\right] = \int_0^1 x^{-p}\,dx = \left.\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_0^1 = \dfrac{1}{p-1}\left(\underbrace{\dfrac{1}{(+0)^{p-1}}}_{+\infty} - 1 \right) = +\infty \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{p < 1}, \quad \textbf{сх} \\ p \ge 1, \quad \text{расх} \end{array} \right.$$